

SMAC 法

春日 悠

2021 年 10 月 16 日

目 次

1 はじめに	2
2 非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式	2
3 SMAC 法	2
4 反復型 SMAC 法	3
5 HSMAC 法	4
5.1 SMAC 法との関係	5
6 圧力振動の回避	7
6.1 スタッガード格子	7
6.2 コロケート格子	7
7 境界条件	9
7.1 タイプ 1: セル界面を境界に合わせる	9
7.2 タイプ 2: セル界面を境界に合わせて境界外に点を設ける	10
7.3 タイプ 3: 点を境界に合わせる (半セル)	11
7.4 タイプ 4: 点を境界に合わせる (フルセル)	12
7.5 タイプ 5: 点を境界に合わせて境界外に点を設ける	12
7.6 スタッガード格子の境界条件	13
8 フラクショナルステップ法	14
9 陰的 SMAC 法	15
10 SIMPLE 法との比較	16

1 はじめに

流体現象の数値解法の一つである SMAC 法について整理する.

2 非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式

非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式は次のように表される.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{u}$ は流速, p は圧力を密度で割ったもの (以下では単に圧力と呼ぶ), ν は動粘性係数である. 第 1 式は運動方程式, 第 2 式は連続の式である. 未知数が $\mathbf{u}$ と p の 2 つで, 式も 2 つあるが, 連続の式に圧力がないので, これらを解くには工夫がいる.

3 SMAC 法

SMAC 法は, 流体現象の数値解法における圧力-速度連成手法の 1 つで, MAC 法と呼ばれるものの改良版である. 運動方程式を時間について離散化して, 次のように表す.

$$\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^0}{\Delta t} = -\nabla p + CD^0 \quad (3)$$

ここで, Δt は時間刻み幅, CD は対流項と拡散項をまとめたものである. ここでは, 前の時刻の値を用いることを表すのに右肩に 0 をつけ, 次の時刻の値には何もつけないことにする. 上の式では, 圧力勾配を陰的に, 対流・拡散項を陽的に扱っていることになる.

これを次のように分ける.

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^0}{\Delta t} = -\nabla p^0 + CD^0 \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla \phi \quad (5)$$

ここで, $\mathbf{u}^*$ は仮の速度, ϕ は $\phi = p - p^0$ を表す.

上の式はそれぞれ次のように書ける.

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^0 - \Delta t \nabla p^0 + \Delta t CD^0 \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi \quad (7)$$

式 (7) の発散をとると

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla^2 \phi = 0 \quad (8)$$

これより

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (9)$$

これを解けば圧力の補正值 ϕ が求まる。

計算の手順は、まず式 (6) で仮の速度 $\mathbf{u}^*$ を予測し、次に式 (9) を解いて圧力補正值 ϕ を求め、式 (7) より次の時刻の速度 $\mathbf{u}$ を計算する。また、 $p = p^0 + \phi$ で圧力を更新する。これを繰り返す。

解釈上、気をつけるべきことは、ここで圧力と呼んでいる p に当たるもので連続の式を満たす速度場を与えるものは、圧力以外にもありうるということである。つまり、求めた p が本当に圧力になっているかどうか気にしておく必要がある。

4 反復型 SMAC 法

SMAC 法では、圧力補正のポアソン方程式が反復法によって解かれるが、それによって補正された速度場が連続の式を十分に満足しているかどうか (反復計算の終了判定が適切かどうか) ははっきりとしない。そこで、連続の式を十分に満たすまで圧力・速度補正を繰り返すことを考える。

反復回数を k として、 k 番目に求めた速度を $\mathbf{u}^k$ などと表すと

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^k \quad (10)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{k+1} \quad (11)$$

ここで、 ϕ の変化値を $\delta\phi$ とすると、 $\phi^{k+1} = \phi^k + \delta\phi^{k+1}$ と書けるので

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{k+1} \\ &= \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^k - \Delta t \nabla \delta\phi^{k+1} \\ &= \mathbf{u}^k - \Delta t \nabla \delta\phi^{k+1} \end{aligned} \quad (12)$$

つまり

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \Delta t \nabla \delta\phi^{k+1} \quad (13)$$

である。これの発散が最終的に 0 になると考えると

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^k - \Delta t \nabla^2 \delta\phi^{k+1} = 0 \quad (14)$$

これより次式を得る。

$$\nabla^2 \delta\phi^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^k \quad (15)$$

上の式を解いて $\delta\phi^k$ を求め、式 (13) で速度 $\mathbf{u}^{k+1}$ を計算する、ということを $\nabla \cdot \mathbf{u}^k$ が十分に小さくなるまで繰り返すことで、速度場が連続の式を確実に満たすようになる。ここではこの方法を「反復型 SMAC 法」と呼ぶことにする。

5 HSMAC 法

SMAC 法の難点は、圧力補正 ϕ についてのポアソン方程式を解くのに時間がかかることである。この計算を簡単にしようとしたのが HSMAC 法 (あるいは SOLA 法) である。ここで 1 次元問題を考える。反復型 SMAC 法の式 (15) を差分法により離散化すると

$$\frac{\delta\phi_{i+1} - 2\delta\phi_i + \delta\phi_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta t} D_i \quad (16)$$

ここでは $D_i = (\nabla \cdot u)_i$ とした。これをガウス・ザイデル法で解くとすると (添字 i の順番で計算するとすれば), 反復回数を l として

$$\delta\phi_i^{l+1} = \frac{\delta\phi_i^l + \delta\phi_{i-1}^{l+1}}{2} - \frac{1}{2\Delta t(1/\Delta x^2)} D_i^l \quad (17)$$

ここで思い切って右辺第 1 項を無視してしまい, さらに l と k を同一視する。

$$\delta\phi_i^{k+1} = -\frac{1}{2\Delta t(1/\Delta x^2)} D_i^k \quad (18)$$

これを式 (15) を解く代わりに使えばよい。ふつうは加速係数 ω が導入される。

$$\delta\phi_i^{k+1} = -\frac{\omega}{2\Delta t(1/\Delta x^2)} D_i^k \quad (19)$$

加速係数 ω の値は 1 から 2 の間で取られる。

右辺の係数で $(1/\Delta x^2)$ という妙な表現をしているが, これは 2 次元, 3 次元を見据えたもので, 2 次元の場合はこれが $(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2)$ などとなる。

HSMAC 法は, ポアソン方程式を解かなくてよいだけでなく, 境界条件を必要としないという特徴がある。ただ, 圧力・速度補正の反復計算の回数が増えるので, 場合によってはふつうにポアソン方程式を解いたほうが速いことがある。

上のややいい加減に見える省略は, 優対角化という理由づけができるが, ある種のニュートン法であるという見方もできる。式 (7) の発散をとって差分法で離散化すると

$$D_i = D_i^* - \Delta t \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (20)$$

D_i を ϕ_i の関数として (ここですでに省略が入っている), $D_i = 0$ についてニュートン法を適用すると

$$\delta\phi_i^{k+1} = -\frac{D_i^k}{\partial D_i / \partial \phi_i} \quad (21)$$

ここで

$$\frac{\partial D_i}{\partial \phi_i} = 2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} \right) \quad (22)$$

なので, 式 (18) が得られる。

5.1 SMAC 法との関係

ところで、式 (18) より

$$D_i^k = -2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} \right) \delta\phi_i^{k+1} \quad (23)$$

である．式 (13) の発散をとって離散化したものに上式を入れると (便宜上 k を 1 だけ減らすとして)

$$-2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} \right) \delta\phi_i^{k+1} = -2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} \right) \delta\phi_i^k - \Delta t \frac{\delta\phi_{i+1}^k - 2\delta\phi_i^k + \delta\phi_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (24)$$

これを整理すると

$$\frac{\delta\phi_{i+1}^k - 2\delta\phi_i^{k+1} + \delta\phi_{i-1}^k}{\Delta x^2} = 0 \quad (25)$$

つまり

$$\nabla^2 \delta\phi = 0 \quad (26)$$

をヤコビ法で解いているのと同じことになる (反復型 SMAC 法の反復回数 k の役割がヤコビ法の反復回数に変わっていることに注意)．

一方，SMAC 法の式 (9) をヤコビ法で解くとすると

$$\frac{\phi_{i+1}^l - 2\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^l}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta t} D_i^* \quad (27)$$

$$\frac{\phi_{i+1}^{l-1} - 2\phi_i^l + \phi_{i-1}^{l-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta t} D_i^* \quad (28)$$

第 1 式から第 2 式を引くと

$$\frac{\delta\phi_{i+1}^l - 2\delta\phi_i^{l+1} + \delta\phi_{i-1}^l}{\Delta x^2} = 0 \quad (29)$$

つまり，HSMAC 法同様

$$\nabla^2 \delta\phi = 0 \quad (30)$$

をヤコビ法で解いているのと同じである．

結局，HSMAC 法は，境界条件をきちんと設定すれば，SMAC 法のポアソン方程式を (終了判定に連続の式を用いた) ヤコビ法で解くのと同じである．また，HSMAC 法は，反復型 SMAC 法の最終状態に直接的に向かおうとする方法といえる．見かけは違うが，基本となる手法はどれも同じということである．

ところで，これをヤコビ法ではなくて，ガウス・ザイデル法に相当するものにできないだろうか．つまり，位置 $i-1$ の反復回数を $k+1$ にして

$$\frac{\delta\phi_{i+1}^k - 2\delta\phi_i^{k+1} + \delta\phi_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (31)$$

にできないか。こうなるには

$$D_i^k = D_i^{k-1} - \Delta t \frac{\delta\phi_{i+1}^k - 2\delta\phi_i^k + \delta\phi_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \quad (32)$$

となる必要がある。これは次のように表される（その前に格子の議論があるが、とりあえずスタaggered格子（図2）を想定して次のようにしたとする）。

$$\frac{u_{i+1}^k - u_i^{k+1/2}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1}^{k-1} - u_i^{k-1/2}}{\Delta x} - \Delta t \frac{\delta\phi_{i+1}^k - 2\delta\phi_i^k + \delta\phi_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \quad (33)$$

これより、速度更新は次のように表せばよいことになる。

$$u_i^{k+1/2} = u_i^{k-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta\phi_i^k - \delta\phi_{i-1}^{k+1}) \quad (34)$$

$$u_{i+1}^k = u_{i+1}^{k-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta\phi_{i+1}^k - \delta\phi_i^k) \quad (35)$$

ここで、 u_i の反復回数が $k+1/2$ や $k-1/2$ と中途半端にしてあるのは、 $\delta\phi$ について k と $k+1$ が混ざっているためである。上式はそれぞれ次のように分解できる。

$$u_i^k = u_i^{k-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_i^k \quad (36)$$

$$u_i^{k+1/2} = u_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_{i-1}^{k+1} \quad (37)$$

$$u_{i+1}^{k-1/2} = u_{i+1}^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_i^k \quad (38)$$

$$u_{i+1}^k = u_{i+1}^{k-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_{i+1}^k \quad (39)$$

上2式と下2式はお互いに変換できる。これらより、位置 i における圧力補正值についての速度更新は次のように書ける。

$$u_i^{k+1} = u_i^{k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_i^{k+1} \quad (40)$$

$$u_{i+1}^{k+1/2} = u_{i+1}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_i^{k+1} \quad (41)$$

まとめると、速度更新手続きは次のようになる。

$$D_i^k = \frac{u_{i+1}^k - u_i^{k+1/2}}{\Delta x} \quad (42)$$

$$\delta\phi_i^{k+1} = -\frac{1}{2\Delta t(1/\Delta x^2)} D_i^k \quad (43)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^{k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_i^{k+1} \quad (44)$$

$$u_{i+1}^{k+1/2} = u_{i+1}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta\phi_i^{k+1} \quad (45)$$

これにより、ガウス・ザイデル法に相当するものになる。さらに加速係数 ω を導入した場合は、SOR 法に相当するものになる。

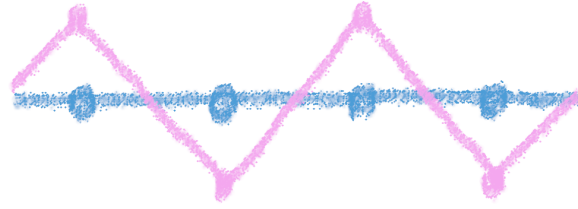


図 1: 圧力振動

6 圧力振動の回避

6.1 スタッガード格子

速度と圧力を同じ点で定義するふつうの格子 (regular grid) で上述のアルゴリズムを使うと、問題が起こる。というのも、運動方程式の圧力勾配を 1 次元で格子点 i 周りで離散化すると

$$\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta x} \quad (46)$$

となるが、これだと参照される格子点が 1 個飛びでペアになるため、圧力分布がギザギザになっていても勾配は 0, というような奇妙な状況を表現できてしまう (図 1)。これが原因で圧力振動が起こる。

この問題を避けるために、MAC 法ではスタッガード格子 (staggered grid) が用いられる (図 2)。スタッガード格子では、たとえば圧力はふつうの格子点で定義し、速度は格子点を中心とした体積 (セル) の界面で定義する。それぞれへの添字の付け方はいくつか考えられるが、プログラミングのことを考えると、圧力の添字を i としたら、速度の添字はそれに相対的に設定する。格子の端に速度の点を置くかどうかで変わってくるが、もし置くことにしたら図 2 のようになる。置かなかったら速度の添字に 1 が足される。圧力の点と速度の点にそれぞれ端から 0, 1, 2, ... と番号を付けていって、それらの関係を見ればよい。

スタッガード格子の場合、速度の点 i 周りの圧力勾配は

$$\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \quad (47)$$

となるため、参照される格子点は飛び飛びではなくなり、上述の問題は生じない。スタッガード格子の欠点は、プログラミングが若干めんどくさいことと、有限体積法による非構造格子化に適用しにくいことである。

6.2 コロケート格子

圧力と速度で同じ点を用いた格子で圧力振動を回避するには、セル界面の速度の補間を考え、それを少し工夫する。この方法を用いた格子をコロケート格子 (collocated grid) というが、格子としてはふつうの格子と同じである (図 3)。

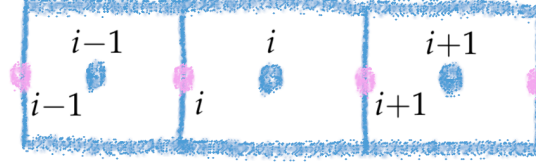


図 2: スタッガード格子

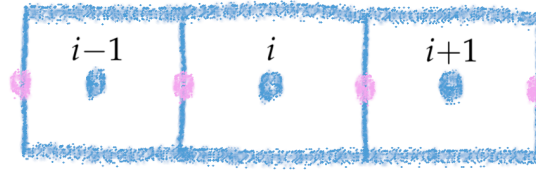


図 3: コロケート格子

ふつうの格子の場合，セル界面ベースで考えたときに，運動方程式から出てきた速度をそのまま界面に補間して発散を表現すると，圧力のラプラシアン の 離散化表現 についてのステンシルが広がってしまう．界面の速度を $u_{i+1/2}$ として，速度の発散を

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (48)$$

とすると，速度に含まれる圧力勾配の項は

$$\frac{(\nabla p)_{i+1/2} - (\nabla p)_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (49)$$

となる．ここまではよいが，界面の速度を両隣の点の速度から補間すると

$$u_{i+1/2} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \quad (50)$$

となるが，その中の圧力勾配は

$$(\nabla p)_{i+1/2} = \frac{(\nabla p)_i + (\nabla p)_{i+1}}{2} \quad (51)$$

となる．これを用いると

$$\frac{(\nabla p)_{i+1/2} - (\nabla p)_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{p_{i+2} - 2p_i + p_{i-2}}{4\Delta x^2} \quad (52)$$

となり，ラプラシアンの離散化表現がステンシルの広いものになってしまう．しかし，そもそも界面の圧力勾配は直接表現できる．

$$(\nabla p)_{i+1/2} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \quad (53)$$

こちらを用いると

$$\frac{(\nabla p)_{i+1/2} - (\nabla p)_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (54)$$

となり、ふつうのラプラシアン of 離散化表現になる。

ということは、速度の発散を表現する際に、運動方程式から出てきた速度をそのまま用いるのではなくて、圧力勾配項とそれ以外を分けて、それぞれで離散化すればよいことになる。SMAC 法の場合、仮の速度

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^0 - \Delta t \nabla p^0 + \Delta t C D^0 \quad (55)$$

をそのまま界面に補間する代わりに

$$\mathbf{u}^* = \hat{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla p^0 \quad (56)$$

として、 $\hat{\mathbf{u}}$ と圧力勾配項を別々に界面補間して合成すればよい。これは Rhie-Chow 補間と呼ばれる。界面速度は次のステップの対流項の計算にも使えるので、速度とは別にしておいて、速度更新も個別に行えばよい。

これだけでは、圧力勾配の離散化表現が飛び飛びであること自体は解決していないように見えるが、上の工夫を用いることにより圧力に拡散の効果を導入することになり、これにより圧力の振動が抑えられるようである。

コロケート格子の利点は、スタaggered格子と比べて格子周りのプログラミングがややこしくないことと、有限体積法による非構造格子化に適用しやすいことである。欠点は、スタaggered格子と比べて界面補間という余計な処理が入ることと、計算精度が若干落ちることである。

7 境界条件

流体計算を正しく、安定的に行うためにキモとなるのは、境界条件である。差分法において、境界条件の設定方法にはいくつか選択肢がある。ここでは以下の5つを検討する。

7.1 タイプ1：セル界面を境界に合わせる

セル界面を境界に合わせると、格子は作りやすい(図4)。ただ、境界条件をセル界面に与える必要がある。

勾配 ∇u の境界条件について考えよう。界面ベースで考えると、1次元なら

$$(\nabla u)_i = \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (57)$$

と離散化できる。境界の値が指定されており、その値を u_b とするなら、境界の値を直接

$$u_{-1/2} = u_b \quad (58)$$

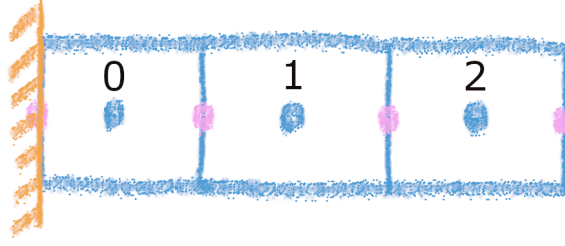


図 4: 境界格子タイプ 1

とすればよい。もし、境界の勾配が $(\nabla u)_b$ と指定されているなら

$$(\nabla u)_b = \frac{u_0 - u_{-1/2}}{\Delta x/2} \quad (59)$$

より

$$u_{-1/2} = u_0 - (\nabla u)_b \frac{\Delta x}{2} \quad (60)$$

とすればよい。

ラプラシアン $\nabla^2 u$ の場合は

$$(\nabla^2 u)_i = \frac{(\nabla u)_{i+1/2} - (\nabla u)_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (61)$$

と表される。境界の値が指定されている場合は

$$(\nabla u)_{-1/2} = \frac{u_0 - u_b}{\Delta x/2} \quad (62)$$

とすればよい。境界の勾配が指定されている場合は、単純に

$$(\nabla u)_{-1/2} = (\nabla u)_b \quad (63)$$

とすればよい。

7.2 タイプ 2：セル界面を境界に合わせて境界外に点を設ける

セル界面に境界を合わせつつ、境界の外に点を用意すると、格子としては少し複雑になるが、境界条件の設定としては簡単になる (図 5)。

境界の値が指定されている場合は、

$$u_b = \frac{u_0 + u_1}{2} \quad (64)$$

より

$$u_0 = 2u_b - u_1 \quad (65)$$

とすればよい。また、境界の勾配が指定されている場合は

$$(\nabla)_b = \frac{u_1 - u_0}{\Delta x} \quad (66)$$

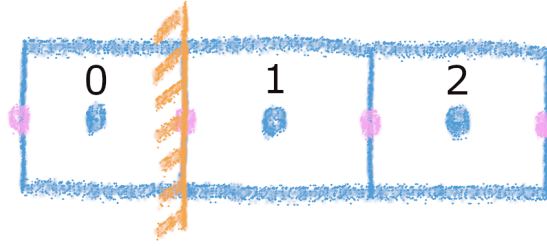


図 5: 境界格子タイプ 2

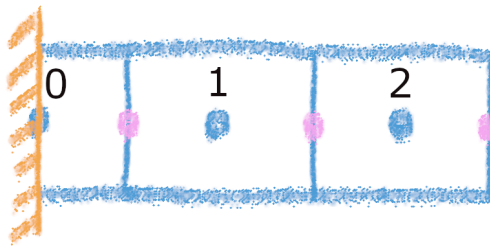


図 6: 境界格子タイプ 3

より

$$u_0 = u_1 - (\nabla u)_b \Delta x \quad (67)$$

となる.

7.3 タイプ 3: 点を境界に合わせる (半セル)

点を境界に合わせると, 境界条件が直接的になる (図 6). 値指定の場合は

$$u_0 = u_b \quad (68)$$

でよい. 勾配指定の場合は

$$\begin{aligned} (\nabla u)_b &= \frac{u_{1/2} - u_0}{\Delta x/2} \\ u_{1/2} &= \frac{u_0 + u_1}{2} \end{aligned} \quad (69)$$

より

$$u_0 = u_1 - (\nabla u)_b \Delta x \quad (70)$$

となる.

7.4 タイプ4：点を境界に合わせる (フルセル)

点を境界に合わせるが、直接的に境界条件を適用したくない場合は、タイプ1のようにセル界面で境界条件を指定する方法が考えられる (図 7).

勾配 ∇u の境界条件は、値指定の場合

$$\begin{aligned} u_b &= \frac{u_{-1/2} + u_{1/2}}{2} \\ u_{1/2} &= \frac{u_b + u_1}{2} \end{aligned} \quad (71)$$

より

$$u_{-1/2} = \frac{3u_b - u_1}{2} \quad (72)$$

である. 勾配指定の場合は

$$(\nabla u)_b = \frac{u_{1/2} - u_{-1/2}}{\Delta x} \quad (73)$$

であるが, $u_{-1/2}$ に値指定境界条件で求められたものを用いて

$$u_{-1/2} = \frac{u_0 + u_1}{2} - (\nabla u)_b \Delta x \quad (74)$$

である.

ラプラシアン $\nabla^2 u$ の境界条件は、値指定の場合

$$(\nabla u)_{-1/2} = \frac{u_b - u_{-1/2}}{\Delta x/2} \quad (75)$$

より

$$(\nabla u)_{-1/2} = \frac{u_1 - u_b}{\Delta x} \quad (76)$$

である. 勾配指定の場合は

$$(\nabla u)_{-1/2} = \frac{u_0 - u_{-1/2}}{\Delta x/2} \quad (77)$$

より

$$(\nabla u)_{-1/2} = 2(\nabla u)_b - \frac{u_1 - u_0}{\Delta x} \quad (78)$$

である.

7.5 タイプ5：点を境界に合わせて境界外に点を設ける

タイプ4に対して、タイプ2同様に余計に点を追加すれば、境界条件の扱いが若干簡単になる (図 8).

値指定の場合

$$\begin{aligned} u_b &= \frac{u_{-1/2} + u_{1/2}}{2} \\ u_{-1/2} &= \frac{u_0 + u_b}{2} \\ u_{1/2} &= \frac{u_b + u_2}{2} \end{aligned} \quad (79)$$

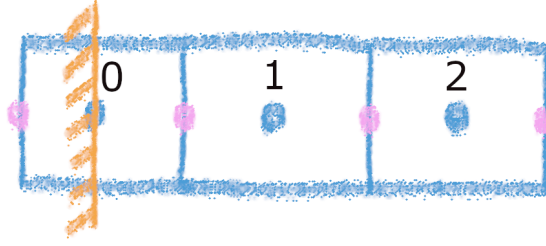


図 7: 境界格子タイプ 4

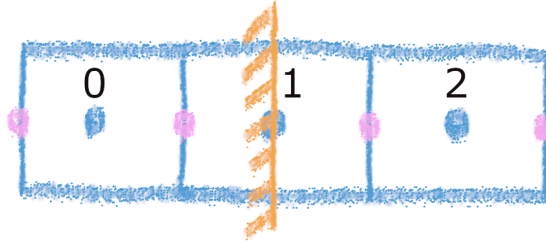


図 8: 境界格子タイプ 5

より

$$u_0 = 2u_b - u_2 \quad (80)$$

である.

勾配指定の場合

$$(\nabla u)_b = \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} \quad (81)$$

より

$$u_0 = u_2 - (\nabla u)_b(2\Delta x) \quad (82)$$

である.

タイプ 5 の欠点は、他のタイプに比べてステンシルが広いことである.

7.6 スタッガード格子の境界条件

上述の 5 つのタイプのうち、単純なのはタイプ 2 かタイプ 3 である. スタッガード格子を考えた場合、圧力をタイプ 2 で、速度をタイプ 3 で表現するとよさそうである.

SMAC 法では、速度の格子にタイプ 3 を用いる場合は、境界点の速度を固定して、その点での圧力補正は無視することになる. この方法には少し問題があると考えられる. というのも、境界の速度を強制的に固定して圧力補正を無視すると、境界の圧力の補正が行われないことになるからである. それでも速度が連続の式を満たすようにできるのは、連続の式を満たすような p は物理的な意味での圧力に限る必要がないた

めである。これが気になるなら、速度の格子にタイプ 4 かタイプ 5 を用いて、境界速度を直接指定しない方法が考えられる。この場合、タイプ 5 のほうが単純である。

速度の格子にタイプ 5 を用いる場合、速度補正のときに境界条件を満たせるよう、圧力補正を調整する必要がある。反復型 SMAC 法であれば、1 次元の場合

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \Delta t \frac{\delta\phi_i^k - \delta\phi_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (83)$$

なので、 $u_1^{k+1} = u_b$ とすると、境界の圧力補正值は

$$\delta\phi_0^k = \phi_1^k + \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_b - u_1^k) \quad (84)$$

となる。

8 フラクショナルステップ法

SMAC 法に似た手法で、フラクショナルステップ (fractional step) 法というものがある。時間について離散化した運動方程式

$$\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^0}{\Delta t} = -\nabla p + CD^0 \quad (85)$$

これを次のように分ける。

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^0}{\Delta t} = CD^0 \quad (86)$$

$$\frac{\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla p \quad (87)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{u}}$ は運動方程式で圧力勾配項を無視して求められた速度で、中間速度などと呼ばれる。これらはそれぞれ次のように書ける。

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^0 + \Delta t CD^0 \quad (88)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla p \quad (89)$$

上の第 2 式の発散をとって 0 とすると

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla^2 p = 0 \quad (90)$$

これより

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (91)$$

これを解けば圧力 p が求まる。

フラクショナルステップ法は、もとにしている式が同じなので、SMAC 法と実質同じ手法であり、考え方は SMAC 法より単純である。問題は、 $\hat{\mathbf{u}}$ の物理的な意味が不明瞭なことで、便宜上は速度の境界条件が設定されるが、妥当性は少し怪しい。

また、一見しただけではSMAC法と同じなのだが、運動方程式を分けるときに時間について分離誤差が生じており、これがSMAC法では Δt の2次の誤差である一方、フラクショナルステップ法では1次の誤差になっている。ポイントは、SMAC法では圧力の時間差 ϕ が使われており、これが Δt に比例するとみなせることである。問題になるのは、時間の離散化に2次以上の精度の手法を用いた場合で、フラクショナルステップ法の場合、分離誤差で精度が帳消しになってしまう恐れがある。

9 陰的SMAC法

SMAC法は、もともと時間については陽的であるが、陰解法を用いることもできる。その場合、対流項を陰的に扱うのは高精度の離散化手法を使うときにめんどくさいので、粘性項だけが陰的に扱われたりする。

運動方程式を時間について離散化して、次のように表す。

$$\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^0}{\Delta t} = -\nabla p + C^0 + D \quad (92)$$

ここで、 C 、 D はそれぞれ対流項、拡散項である。これを次のように分ける。

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^0}{\Delta t} - D^* = -\nabla p^0 + C^0 \quad (93)$$

$$\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla \phi \quad (94)$$

ここで、注目セルを p 、隣接セルを n で表すことにし、係数を a_p などとして、拡散項 D を離散化すると、上の第1式は次のように表せる。

$$\frac{\mathbf{u}_p^* - \mathbf{u}_p^0}{\Delta t} + a_p \mathbf{u}_p^* + \sum_n a_n \mathbf{u}_n^* = -\nabla p^0 + C^0 \quad (95)$$

これを整理すると

$$a'_p \mathbf{u}_p^* + \sum_n a_n \mathbf{u}_n^* = -\nabla p^0 + C^0 + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}_p^0 \quad (96)$$

ここで、 $a'_p = 1/\Delta t + a_p$ とした。これ(連立方程式になる)を解いて $\mathbf{u}^*$ が求まる。圧力補正方程式は、陽的な場合と同じである。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}_p^* \quad (97)$$

反復型SMAC法なら

$$\nabla^2 \delta \phi^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^k \quad (98)$$

対流項まで陰的に扱うなら

$$a'_p \mathbf{u}_p^* + \sum_n a_n \mathbf{u}_n^* = -\nabla p^0 + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}_p^0 \quad (99)$$

対流速度を陰的に扱うために、反復型 SMAC 法で、補正された速度を用いて運動方程式を繰り返し解き直すことが考えられる。ただし、それでも $\mathbf{u}^*$ はあくまで $\mathbf{u}$ とは別ものであり続ける。これにより運動方程式と圧力補正方程式はきっちり分離されている。

陰解法でコロケート格子を用いる場合は、工夫が必要である。というのも、圧力補正方程式の右辺を計算するために仮の速度の界面補間を考えたとき、この場合の仮の速度は

$$\mathbf{u}_p^* = \hat{\mathbf{u}}_p - \frac{1}{a'_p} \nabla p^0 \quad (100)$$

と書けるが、右辺第 2 項をそのまま界面補間すると (1 次元で考えると)

$$\left(\frac{1}{a'} \nabla p \right)_{i+1/2} = \frac{\left(\frac{1}{a'} \nabla p \right)_i + \left(\frac{1}{a'} \nabla p \right)_{i+1}}{2} \quad (101)$$

となり、界面の圧力勾配を直接離散化できないので、圧力振動を回避できないことになる。これに対処するために、以下のように近似する。

$$\left(\frac{1}{a'} \nabla p \right)_{i+1/2} \approx \frac{1}{a'_{i+1/2}} (\nabla p)_{i+1/2} \quad (102)$$

これなら界面の圧力勾配を直接離散化できて、圧力振動に対応できる。

10 SIMPLE 法との比較

SMAC 法と同様の手法として、SIMPLE 法がある。これらはどう違うのだろうか。SIMPLE 法は定常問題を解くために開発されたもので、陰解法である。

注目セルを p 、隣接セルを n で表し、係数を a_p などとすると、運動方程式の半離散化式は次のように表される。

$$a'_p \mathbf{u}_p + \sum_n a_n \mathbf{u}_n = -\nabla p + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}_p^0 \quad (103)$$

ここで、 $a'_p = 1/\Delta t + a_p$ である。速度と圧力を、それぞれ推定値と補正值に分けて表現する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u} \\ p &= p^* + \delta p \end{aligned} \quad (104)$$

これらを運動方程式に入れると

$$a'_p \mathbf{u}_p^* + \sum_n a_n \mathbf{u}_n^* = -\nabla p^* + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}_p^0 - (a'_p \delta \mathbf{u}_p + \sum_n a_n \delta \mathbf{u}_n + \nabla \delta p) \quad (105)$$

右辺第 3 項は最終的に 0 になるはずなので、次のように分離できる。

$$a'_p \mathbf{u}_p^* + \sum_n a_n \mathbf{u}_n^* = -\nabla p^* + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}_p^0 \quad (106)$$

$$a'_p \delta \mathbf{u}_p + \sum_n a_n \delta \mathbf{u}_n = -\nabla \delta p \quad (107)$$

第2式より

$$\delta \mathbf{u}_p = -\frac{\sum_n a_n \delta \mathbf{u}_n}{a'_p} - \frac{1}{a'_p} \nabla \delta p \quad (108)$$

速度の発散を取ると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_p &= \nabla \cdot \mathbf{u}_p^* + \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_p \\ &= \nabla \cdot \mathbf{u}_p^* - \nabla \cdot \left(\frac{\sum_n a_n \delta \mathbf{u}_n}{a'_p} + \frac{1}{a'_p} \nabla \delta p \right) = 0 \end{aligned} \quad (109)$$

これより、次式を得る.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a'_p} \nabla \delta p \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}_p^* + \nabla \cdot \left(\frac{\sum_n a_n \delta \mathbf{u}_n}{a'_p} \right) \quad (110)$$

式(110)を解いて δp を求め、式(108)で $\delta \mathbf{u}_p$ を求めて圧力と速度を補正すればよいのだが、 $\delta \mathbf{u}_n$ の項は最後には0になるということで無視される. つまり、次式を用いる.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a'_p} \nabla \delta p \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}_p^* \quad (111)$$

$$\delta \mathbf{u}_p = -\frac{1}{a'_p} \nabla \delta p \quad (112)$$

運動方程式(106)および上の2式を繰り返し解いて、圧力と速度を更新する. ただし、項を一部無視したことにより圧力補正が大きめになっており、それが圧力計算の収束性を悪化させるため、ふつうは緩和係数が用いられる.

陰的反復型 SMAC 法と SIMPLE 法は、一見似ているが、SIMPLE 法では、運動方程式の圧力が更新されることと、圧力補正方程式のラプラシアンに運動方程式の係数が含まれるところが異なる. これは、SMAC 法はスプリッティング法によって運動方程式と圧力補正方程式をきっちり分離しているが、SIMPLE 法はそれらが連成していることによる違いである. もし SIMPLE 法で対流項を陽的に扱ったなら、運動方程式を解き直す必要はなくなるが、それでも圧力補正方程式の係数は残る. 完全に陽解法にしていまえば、反復型 SMAC 法と SIMPLE 法は一致する.

参考文献

- [1] 峯村吉泰：Java による流体・熱流動の数値シミュレーション，森北出版，(2001).
- [2] 平野博之：流れの数値計算と可視化 第3版，丸善出版，(2011).
- [3] 梶島岳夫：乱流の数値シミュレーション 改訂版，養賢堂，(2014).

- [4] 富山明男, 平野雅司: SOLA 法の改良, 日本機械学会論文集 (B 編), 58 巻 551 号 (1992-7), 2171.
- [5] 肖鋒, 長孝夫: 数値流体解析の基礎, コロナ社, (2020).
- [6] 公益社団法人 土木学会 応用力学委員会 計算力学小委員会 編: いまさら聞けない 計算力学の定石, 丸善出版 (2020).
- [7] スハス V. パタンカー: コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985.