

線形代数

春日 悠

2021 年 12 月 19 日
(2003 年 8 月 22 日版改訂版)

目 次

1	ベクトル	2
1.1	ベクトル	2
1.2	ベクトルの演算	3
1.2.1	ベクトルとスカラーの積	3
1.2.2	ベクトルの和	3
1.2.3	ベクトルの内積	3
2	行列	4
2.1	線形写像	4
2.2	行列	5
2.3	行列の演算	5
2.3.1	行列とスカラーの積	5
2.3.2	行列の和	6
2.3.3	行列の積	6
2.4	転置行列	7
2.5	対称行列	7
2.6	単位行列	8
2.7	逆行列	8
2.8	直交行列	9
2.9	行列式	9
2.10	ベクトルの外積	12
3	連立一次方程式	12
3.1	連立一次方程式	12
3.2	掃き出し法	13
3.3	逆行列の計算	14
3.4	行列式の計算	14

4 二次形式と対角化	15
4.1 基底ベクトル	15
4.1.1 線形結合と線形独立	15
4.1.2 基底ベクトル	15
4.2 双一次形式	16
4.3 内積	17
4.4 グラム-シュミットの直交化	18
4.5 合同変換	19
4.6 二次形式	20
4.7 二次形式の対角化	21
4.7.1 直交行列による対角化	21
4.7.2 例：二次曲線の主軸変換	23
4.7.3 不変量	25
4.7.4 一般の基底変換に対する対角化	27
5 線形写像の対角化	28
5.1 相似変換	28
5.2 線形写像の対角化	29
5.2.1 線形写像の対角化	29
5.2.2 不変量	30

1 ベクトル

1.1 ベクトル

大きさと方向をもつ量を**ベクトル** (vector) という。ベクトルは幾何学的には有向線分で描かれ、**基底ベクトル** (後述) をもとに実数の組で表される。たとえば、ベクトル $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

のように表すことができる。このように実数を縦に並べたものを**列ベクトル** (column vector) という。 $a_1, a_2, \dots, a_n$ をベクトル $\mathbf{a}$ の**成分** (component) または**要素** (element) といい、 a_i で表すこともある。成分の数を**次元** (dimension) といい、成分を n 個もつベクトルを **n 次元ベクトル** (n-dimensional vector) という。 n 次元ベクトルの集合を **n 次元ベクトル空間** (n-dimensional vector space) という。

ベクトルに対して、実数を**スカラー** (scalar) という。

1.2 ベクトルの演算

1.2.1 ベクトルとスカラーの積

ベクトルとスカラーの積は、ベクトルの各成分をスカラー倍するものとして定義する。ベクトル $\mathbf{a}$ とスカラー c の積は

$$c\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

となる。この操作は、有向線分としてのベクトル $\mathbf{a}$ の方向を変えずに大きさを c 倍することを意味する。 c が負のときは $\mathbf{a}$ の向きが反対になる。 $\mathbf{a}$ に -1 をかけた場合は $-\mathbf{a}$ と書く。

1.2.2 ベクトルの和

2つのベクトルの和を、各成分の和として定義する。ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の和は

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。同じ次元のベクトルどうして和を計算できる。

差は $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ と定義する。特に

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

であり、 $\mathbf{0}$ を**零ベクトル**という。零ベクトルは、すべての成分が0のベクトルで

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。

1.2.3 ベクトルの内積

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**内積** (inner product) という演算を次のように定義する。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i \quad (6)$$

内積の結果はスカラーである。同じ次元のベクトルどうして内積を行える。

ベクトルの**大きさ** (magnitude) は次のように表現できる。

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (7)$$

これはベクトルの**ノルム** (norm) とも呼ばれる。

ベクトルの内積は、次のようにも表現できる。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (8)$$

ここで、 θ はベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が作る角度である。 θ が 90° のとき、すなわちベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積が 0 のとき、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は互いに**直交する** (orthogonal) という。

ベクトル空間において、ベクトルの内積や大きさを上のように定義したとき、この空間を**ユークリッド空間** (Euclidean space) という。

2 行列

2.1 線形写像

ベクトル $\mathbf{x}$ を写像 A が

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad (9)$$

によってベクトル $\mathbf{y}$ に写すとし、これが以下の性質

- $A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x}$
- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$

を持つとき、 A を**線形写像** (linear mapping) という。

たとえば、2次元直交座標における点 (x, y) を、原点を軸にして θ だけ回転して (x', y') に写す写像を考えると、次のように書ける。

$$\begin{cases} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (10)$$

これを列ベクトルを用いて次のように書くことにする。

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ベクトルを用いて次のように表すことにする。

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、写像 A の成分を行列という形で表している。 $m \times n$ の行列と n 次元列ベクトルとの「積」を、次のような演算として約束している。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.2 行列

複数の値を縦横に並べたものを**行列** (matrix) という。行列 A は次のように表す。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ を行列の**成分**または**要素**といい、 a_{ij} で表すこともある。横の並びを**行** (row)、縦の並びを**列** (column) といい、行が m 個、列が n 個ある行列を $m \times n$ 行列という。

2.3 行列の演算

2.3.1 行列とスカラーの積

行列とスカラーの積を、行列の各成分をスカラー倍するものとして定義する。行列 A とスカラー c の積は次のようになる。

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix} \quad (16)$$

A に -1 をかけた場合は $-A$ と書く。

2.3.2 行列の和

行列の和を，各成分どうしの和として定義する．行列 A と B の和は

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる．同じ行列数の行列どうしで和を計算できる．

差は $A - B = A + (-B)$ と定義する．特に

$$A - A = A + (-A) = O \quad (18)$$

であり， O を**零行列**という．零行列は，すべての成分が 0 の行列である．

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

2.3.3 行列の積

行列 A と B のあいだの積を， A の行ベクトルと B の列ベクトルの内積として定義する．たとえば， 3×3 行列 A と B の積は以下ようになる．

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

$m \times l$ 行列と $l \times n$ 行列の積を成分で書くと，以下のように書ける．

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj} \quad (21)$$

行列の積は，前の行列の列数と，後の行列の列数が一致していなくてはならない． $m \times l$ 行列と $l \times n$ 行列の積の結果は， $m \times n$ 行列となる．

行列の積は，一般に $AB \neq BA$ である．また， $A \neq O$ ， $B \neq O$ でも $AB = O$ になることがある．

行列の積には，次の性質がある．

- $(A + B)x = Ax + Bx$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

2.4 転置行列

行列の行と列を交換することを**転置** (transpose) という。転置した行列を**転置行列** (transposed matrix) といい、 A の転置行列を A^T で表す。

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (22)$$

成分で書くと a_{ij} の転置は a_{ji} であり、添字を交換した形になる。 $m \times n$ 行列の転置行列は、 $n \times m$ 行列になる。

転置には、次のような性質がある。

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

2.5 対称行列

行と列の数が等しい行列を**正方行列** (square matrix) という。 $n \times n$ の正方行列を n 次正方行列という。正方行列が $A = A^T$ となるとき、行列 A を**対称行列** (symmetric matrix) という。すなわち、 $a_{ij} = a_{ji}$ である。

また、 $A^T = -A$ を満たす行列を**反対称行列** (antisymmetric matrix) あるいは**交代行列** (alternating matrix) という。すなわち、 $a_{ij} = -a_{ji}$ である。

任意の正方行列 A は、対称行列 S と反対称行列 T の和に分けることができる。

$$\begin{aligned} A &= S + T \\ S &= \frac{1}{2}(A + A^T) \\ T &= \frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned} \quad (23)$$

2.6 単位行列

正方行列 A と I が

$$AI = IA = A \quad (24)$$

を満たすとき, I を**単位行列** (identity matrix) という. I は対角線上の成分 (**対角成分**, diagonal component) が 1 で, それ以外の成分が 0 である行列

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

である. I の成分は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (26)$$

と書ける. δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ**とよぶ.

ベクトル x に単位行列をかけても x のままである.

$$Ix = x \quad (27)$$

2.7 逆行列

以下の式

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (28)$$

が成り立つような行列 A^{-1} を, 行列 A の**逆行列** (inverse matrix) という. また, A は A^{-1} の逆行列であり

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (29)$$

が成り立つ. 逆行列をもつ行列を**正則行列** (regular matrix) という.

正方行列 A , B がともに正則行列のとき

$$C = AB \quad (30)$$

も正則行列である. そして

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (31)$$

が成り立つ.

2 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0) \quad (32)$$

の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (33)$$

である.

2.8 直交行列

正方行列 A が、任意のベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して

$$|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| \quad (34)$$

あるいは

$$A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (35)$$

を満たすとき、行列 A を**直交行列** (orthogonal matrix) という。直交行列を成分にもつ写像は、ベクトルの大きさや、ベクトルどうしのなす角を変えない。この写像は、ユークリッド空間での一般の回転を意味する。

直交行列には、次のような性質がある。

- $AA^T = A^T A = I$
- $A^T = A^{-1}$

たとえば

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (36)$$

は直交行列である。

2.9 行列式

正方行列 A が正則行列かどうかを決定づける因子を A の**行列式** (determinant) といい、 $|A|$ または $\det A$ で表す。行列式はスカラーである。行列 A が逆行列をもつ条件は $|A| \neq 0$ である。 $|A|$ が 0 のとき、行列 A を**特異行列** (singular matrix) という。

たとえば、2 次正方行列 A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (37)$$

の行列式は、逆行列の式

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (38)$$

から

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (39)$$

である。

行列式は、 n 次正方行列 A の n 個の列ベクトルが作る n 次元空間の符号付きの体積を意味している。その符号は、行列 A の隣り合う列ベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ としたとき、 $\mathbf{a}$ の方向を $\mathbf{b}$ の方向に揃えるのに角度が正の向きに回転するなら正、負の向きに回転するなら負である。

一般の行列 A の行列式 $|A|$ は、次のように定義される.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n!} \varepsilon(\sigma_{i1}\sigma_{i2}\cdots\sigma_{in}) a_{\sigma_{i1},1} a_{\sigma_{i2},2} \cdots a_{\sigma_{in},n} \quad (40)$$

ここで、整数 $1, 2, \dots, n$ の $n!$ 通りの順列 (permutation) を σ で表し、 σ_{ij} は i 番目の順列の j 番目の整数を表す. $1, 2, \dots, n$ の順列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ があるとき、その中の二つの数を入れ替えることを**互換** (transposition) といい、順列 $(1, 2, \dots, n)$ の偶数回の互換で得られる順列を**偶順列** (even permutation)、奇数回の互換で得られる順列を**奇順列** (odd permutation) という. ε は順列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ に対応した符号を表し、次のように決める.

$$\varepsilon(i_1, i_2, \dots, i_n) = \begin{cases} 1 & (\text{偶順列のとき}) \\ -1 & (\text{奇順列のとき}) \end{cases} \quad (41)$$

たとえば、行列 A が 3 次正方行列のとき、 A の行列式 $|A|$ は

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{aligned} \quad (42)$$

行列式には次の性質がある.

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^T| = |A|$
- 行列 A が正則行列のとき

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad (43)$$

- 行列 A が直交行列のとき

$$|A| = \pm 1 \quad (44)$$

- 行列 A が、対角要素以外が 0 である**対角行列** (diagonal matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (45)$$

あるいは, **上三角行列** (upper triangular matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (46)$$

または, **下三角行列** (lower triangular matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (47)$$

のとき

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \quad (48)$$

である. たとえば, 単位行列の場合は $|I| = 1$ である.

- 行列 A の一つの列を c 倍すると, その行列式は $c|A|$ になる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (49)$$

- 行列 A の一つの列, たとえば第 j 列 a_{ij} (i は任意) が

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij} \quad (50)$$

のように分解できるとき, 行列式を次のように分解できる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} + a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} + a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} + a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (51)$$

- 行列 A の二つの列を入れ替えると, 行列式 $|A|$ は符号を変える.
- 行列 A のどれか二つの列が等しい場合は, $|A| = 0$ である.
- 行列 A の一つの列に他の列の c 倍を加えても, 行列式 $|A|$ の値は変化しない.

2.10 ベクトルの外積

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を 3 次元ベクトルとする. 長さがそれぞれ $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ の線分を 2 辺とする平行四辺形の面積の値を大きさに持ち, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に直交するベクトルを $\mathbf{c}$ として

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (52)$$

のような演算を定義する. このような演算をベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**外積** (outer product) という. 外積は, 行列式を用いて次のように表される.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (53)$$

ここで, $\mathbf{e}_i$ は座標系を決める大きさが 1 のベクトル (**単位ベクトル**, unit vector) で, たとえば

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

などである.

ベクトルの $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \quad (55)$$

である. また, 外積には

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad (56)$$

のような性質がある.

3 連立一次方程式

3.1 連立一次方程式

次の連立一次方程式 (simultaneous equations)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (57)$$

をベクトルと行列を用いて表すと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (58)$$

これを次のように表す.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (59)$$

ここで, 行列 A を**係数行列** (coefficient matrix), ベクトル $\mathbf{x}$ を**未知数ベクトル** (unknown vector), ベクトル $\mathbf{b}$ を**右辺ベクトル** (right-hand-side vector, RHS vector) という.

A が正則行列のとき, 連立一次方程式の解が存在し, その解は

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad (60)$$

である.

3.2 掃き出し法

連立一次方程式を解く方法の一つに**掃き出し法** (sweeping) あるいは **Gauss-Jordan の消去法** (Gauss-Jordan elimination) がある. この方法は, 係数行列 A のある行を何倍かしたり, ある行を何倍かしたものを別の行に加えたりして, 最終的に

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{Bmatrix} \quad (61)$$

の形に変形する.

$m \times n$ 行列 A に対する掃き出し法の計算手順 (**アルゴリズム**, algorithm) を次に示す.

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m \\ \text{pivot} &= a_{ii} \\ a_{ik} &= a_{ik}/\text{pivot} \quad (k = i, i+1, \dots, n) \\ j &= 1, 2, \dots, m \\ i &\neq j \text{ のとき} \\ \text{head} &= a_{ji} \\ a_{jk} &= a_{jk} - a_{ik} \times \text{head} \quad (k = i, i+1, \dots, n) \end{aligned}$$

係数行列 A と右辺ベクトル $\mathbf{b}$ を並べた行列

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad (62)$$

に掃き出し法を適用すると

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{array} \right] \quad (63)$$

が得られる.

3.3 逆行列の計算

正則行列 A の逆行列 A^{-1} の各列ベクトルを $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_n$ とし, 単位行列 I の各列ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ とすると, $AA^{-1} = I$ より

$$A[\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}'_2 \cdots \mathbf{a}'_n] = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_n] \quad (64)$$

と書ける. これより

$$A\mathbf{a}'_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{a}'_2 = \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad A\mathbf{a}'_n = \mathbf{e}_n \quad (65)$$

が得られ, それぞれの連立一次方程式を解けば, 行列 A の逆行列 A^{-1} が求まる. 掃き出し法を用いて $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_n$ を計算することができるが, $\mathbf{a}'_i$ をそれぞれ求めるのではなくて, 行列 A の右端に $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ をすべて並べて計算する. すなわち

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (66)$$

を掃き出し法により

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{array} \right] \quad (67)$$

に変形すれば, 行列 A の逆行列 A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \quad (68)$$

が得られる.

3.4 行列式の計算

正方行列 A に掃き出し法を適用したとき, 途中で行を $d_1, d_2, \dots, d_M$ で割り, L 回だけ行を交換したとする. その結果, 単位行列が得られるから, 行列式の関係は

$$(-1)^L |A| / d_1 d_2 \cdots d_M = 1 \quad (69)$$

である。したがって、 $|A|$ は

$$|A| = (-1)^L d_1 d_2 \cdots d_M \quad (70)$$

により得られる。

4 二次形式と対角化

4.1 基底ベクトル

4.1.1 線形結合と線形独立

一般のベクトル空間の n 個のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ に対して、スカラー $c_1, c_2, \dots, c_n$ をそれぞれかけて加え合わせたもの

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \cdots c_n \mathbf{x}_n \quad (71)$$

をベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ の**線形結合**または**一次結合** (linear combination) という。

どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せられないならば、ベクトルの組 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ は**線形独立**または**一次独立** (linear independence) であるという。そうでない場合は**線形従属**または**一次従属** (linear dependence) であるという。

ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ の線形結合で零ベクトルをつくる時、すなわち

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \cdots c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad (72)$$

とするとき、係数を $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ としないかぎり零ベクトルをつくることのできないなら、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ は線形独立である。

4.1.2 基底ベクトル

一般のベクトル空間において、線形独立のベクトルの組を $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ とすると、任意のベクトル $\mathbf{x}$ はこれらの線形結合

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad (73)$$

で表すことができる。このとき、ベクトルの組 $\{\mathbf{e}_i\}$ を**基底** (basis)、ベクトル $\mathbf{e}_i$ を**基底ベクトル** (basis vector) という。係数 x_i をベクトル $\mathbf{x}$ の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に対する**成分**という。

いったん基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ を定めれば、ベクトル $\mathbf{x}$ は成分の組 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ で一意に表すことができる。これらの成分を縦に並べて書いた n 個の数字の列

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (74)$$

を、ベクトル $\mathbf{x}$ の**成分表示**あるいは**成分列ベクトル**といい、ここでは $\vec{x}$ で表すことにする。 $\mathbf{x}$ の成分列ベクトルの数値は、基底として何を選んだかに依存する。基底は、幾何学的には座標系によって決まる。

注意：これまでのセクションでは少しあいまいにしていたが、ベクトル $\mathbf{x}$ と成分列ベクトル $\vec{x}$ を明確に区別する必要がある。ベクトル $\mathbf{x}$ はベクトルという実体であり、成分列ベクトル $\vec{x}$ はベクトル $\mathbf{x}$ の基底を $\{\vec{e}_i\}$ としたときのベクトルの表現である。ベクトルはどの角度から見てもひとつの「矢印」であるが、その「見え方」(成分)は変わる。成分列ベクトルを扱うときは、何を基底としたものかを常に意識すること。線形写像などの成分行列についても同様である。

4.2 双一次形式

一般に、二つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ について線形であるとき、すなわち

$$\begin{aligned} f(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= c_1f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + c_2f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ f(\mathbf{x}, c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) &= c_1f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + c_2f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \end{aligned} \quad (75)$$

を満たすとき、関数 f を**双一次形式** (bilinear form) という。また

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (76)$$

であるとき、双一次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は**対称**であるという。

基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ により $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{y} &= \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (77)$$

と表すことができる。これを双一次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に代入すると

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (78)$$

となる。ここで $f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ とおけば

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} x_i y_j \quad (79)$$

と表せる。 f_{ij} を双一次形式 f の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する**成分**という。 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する成分列ベクトルをそれぞれ $\vec{x}, \vec{y}$ とすると

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \vec{x}^T F \vec{y} \quad (80)$$

と書ける。行列 F を双一次形式 f の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する成分行列という。

4.3 内積

一般のベクトル空間において、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して実数値関数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を定義でき、これが以下の性質を満たすとき、これをベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**内積**とよぶことにする。

- $(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ (等号は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のときにかぎる)

一般のベクトル空間において、ベクトル $\boldsymbol{x}$ の**ノルム** $\|\boldsymbol{x}\|$ を以下の性質を満たすものとして定義する。

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ (等号は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のときにかぎる)
- $\|c\boldsymbol{x}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

ノルムの定義の一例は $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ である。

ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のあいだの角度 θ を

$$\cos \theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \quad (81)$$

で定義する。このとき、 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であるならば $\theta = 90^\circ$ であり、 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は互いに**直交する**という (もちろん、上のセクションで定義されたベクトルの内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ の議論がもとになっている)。

基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ のすべての基底ベクトルのノルムが1に等しいとき、すなわち任意の i で $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ のとき、 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ は**正規化** (normalize) されているという。また、どの二つの基底ベクトルも互いに直交しているとき、すなわち

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (82)$$

が成り立つとき、 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ は**直交基底** (orthogonal basis) であるという。正規化された直交基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ を**正規直交基底** (orthonormal basis) という。

内積は対称な双一次形式である。基底ベクトルについての内積を

$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \quad (83)$$

とおくと、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j \quad (84)$$

と表すことができ、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の成分列ベクトルを $\vec{x}$, $\vec{y}$ とすると

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \vec{x}^T G \vec{y} \quad (85)$$

と書ける．ここで，行列 G を基底 $\{e_i\}$ に関する**計量行列** (metric matrix) という．内積は，計量行列を成分行列とする双一次形式である．基底が正規直交基底のとき，行列 G は単位行列 I と等しくなる．すなわち

$$(x, y) = \vec{x}^T I \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x \cdot y \quad (86)$$

である．

4.4 グラム-シュミットの直交化

基底 $\{e_i\}$ が正規直交基底ではないとき，これをもとにして正規直交基底 $\{e'_i\}$ を作る方法の一つに**グラム-シュミットの直交化** (Gram-Schmidt orthogonalization) がある．グラム-シュミットの直交化は，以下の手順で行う．

1. $e'_1 = e_1 / \|e_1\|$ とする．
2. e'_2 を e'_1 と e_2 の線形結合により

$$e'_2 = c_1 e'_1 + c_2 e_2 \quad (87)$$

とおく． e'_1 との内積をとって 0 とおくと

$$(e'_2, e'_1) = c_1 (e'_1, e'_1) + c_2 (e_2, e'_1) = 0 \quad (88)$$

である． e'_1 は正規化されているので

$$c_1 = -c_2 (e_2, e'_1) \quad (89)$$

である．したがって

$$e'_2 = c_2 \{e_2 - (e_2, e'_1) e'_1\} \quad (90)$$

となる．ここで， $\|e'_2\| = 1$ になるように c_2 を

$$c_2 = \frac{1}{\|e_2 - (e_2, e'_1) e'_1\|} \quad (91)$$

と決める．

3. 同様にして $e'_3, e'_4, \dots$ と求めていき，いま e'_k までの正規直交ベクトルが得られたとする． e'_{k+1} は $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$ および e_{k+1} の線形結合により

$$e'_{k+1} = c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_k e'_k + c_{k+1} e_{k+1} \quad (92)$$

とおく．これが $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$ と直交しなければならないので，それぞれと内積をとって 0 とおくと， $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$ は正規直交であるから

$$\begin{aligned} (e'_{k+1}, e'_1) &= c_1 + c_{k+1} (e_{k+1}, e'_1) = 0 \\ (e'_{k+1}, e'_2) &= c_2 + c_{k+1} (e_{k+1}, e'_2) = 0 \\ &\vdots \\ (e'_{k+1}, e'_k) &= c_k + c_{k+1} (e_{k+1}, e'_k) = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

である。これより

$$\mathbf{e}'_{k+1} = c_{k+1} \left\{ \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'_i \right\} \quad (94)$$

となる。ここで、 $\|\mathbf{e}'_{k+1}\| = 1$ となるように c_{k+1} を

$$c_{k+1} = \frac{1}{\left\| \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'_i \right\|} \quad (95)$$

と決める。

4.5 合同変換

基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ から新しい基底 $\{\mathbf{e}'_i\}$ に変換することを考える。基底ベクトル $\mathbf{e}'_i$ を $\{\mathbf{e}_i\}$ の線形結合で表して

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{e}_i \quad (96)$$

とする。ベクトル $\mathbf{x}$ を基底 $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}'_i\}$ で表すと

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n x'_j \mathbf{e}'_j \quad (97)$$

これより

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) \mathbf{e}_i \quad (98)$$

となり

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \quad (99)$$

である。ベクトル $\mathbf{x}$ の基底を $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}'_i\}$ としたときの成分列ベクトルをそれぞれ $\vec{x}$, $\vec{x}'$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{x} &= P \vec{x}' \\ \vec{x}' &= P^{-1} \vec{x} \end{aligned} \quad (100)$$

と書ける。ここで、 P は p_{ij} を成分とする行列である。行列 P を基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ から基底 $\{\mathbf{e}'_i\}$ への**変換行列** (transformation matrix) という。これは常に正則行列である。

新しい基底 $\{\mathbf{e}'_i\}$ に関する双一次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の成分は

$$\begin{aligned}
 f'_{ij} &= f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) \\
 &= f\left(\sum_{k=1}^n p_{ki} \mathbf{e}_k, \sum_{l=1}^n p_{lj} \mathbf{e}_l\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{ki} p_{lj} f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{ki} f_{kl} p_{lj}
 \end{aligned} \tag{101}$$

となる．行列で書くと

$$F' = P^T F P \tag{102}$$

である．この式を行列 F の変換行列 P による**合同変換** (congruence transformation) という．内積についても同様に、新しい基底における計量行列 G' は次のように与えられる．

$$G' = P^T G P \tag{103}$$

新しい基底 $\{\mathbf{e}'_i\}$ に関する双一次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の値は

$$\begin{aligned}
 \vec{x}'^T F' \vec{y}' &= (P^{-1} \vec{x})^T (P^T F P) (P^{-1} \vec{y}) \\
 &= \vec{x}^T (P^{-1})^T P^T F P P^{-1} \vec{y} \\
 &= \vec{x}^T (P P^{-1})^T F (P P^{-1}) \vec{y} \\
 &= \vec{x}^T F \vec{y}
 \end{aligned} \tag{104}$$

となり、双一次形式 f の値はどの基底に関する成分を用いても変わらない．これは、基底が変わっても内積の値は変わらないことを意味する．

4.6 二次形式

対称な双一次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ において $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ としたとき、すなわち $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ を**二次形式** (quadratic form) という．そして

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad (\text{等号は } \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ に限る}) \tag{105}$$

を満たす二次形式を**正値二次形式**あるいは**正定値二次形式** (positive definite quadratic form) という．二次形式 f の成分行列を F 、 $\mathbf{x}$ の成分行列ベクトルを $\vec{x}$ とすると

$$\vec{x}^T F \vec{x} \geq 0 \quad (\text{等号は } \vec{x} = \vec{0} \text{ に限る}) \tag{106}$$

となる．このとき F は対称行列であり、この式を満たす対称行列を**正値行列**あるいは**正定値行列** (positive definite matrix) という．

4.7 二次形式の対角化

4.7.1 直交行列による対角化

二次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ の成分行列 F を、合同変換を用いてより簡単な対角行列 F' に変換することを考える。二次形式 f の成分行列が対角行列になるような基底を求めることを、二次形式 f の**対角化** (diagonalization) という。

簡単のために、行列 F を正規直交基底に関する成分行列とし、変換する基底として正規直交基底だけを考える。正規直交基底から正規直交基底へ基底を変換する行列 P は直交行列であり、直交行列を成分にもつような写像 P を**直交変換** (orthogonal transformation) という。ここでは、直交行列 P を変換行列とした行列 F の合同変換による対角化を考える。

二次形式 f の成分行列が対角行列になるような正規直交基底が存在したとして、この基底に関する成分行列が

$$F' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (107)$$

であったとする。このときの基底を $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ とすると

$$f'_{ij} = f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \begin{cases} \lambda_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (108)$$

である。ベクトル $\mathbf{p}_i$ は基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ を用いれば

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{e}_i \quad (109)$$

と表せる。 $\mathbf{p}_i$ の成分列ベクトルを $\vec{p}_i$ とすると

$$\vec{p}_1 = \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{Bmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{Bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{Bmatrix}, \quad \cdots, \quad \vec{p}_n = \begin{Bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{Bmatrix} \quad (110)$$

である。また、基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ から基底 $\{\mathbf{p}_i\}$ への変換行列は

$$P = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (111)$$

である。この成分列ベクトル $\vec{p}_i$ を用いると

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \vec{p}_i^T F \vec{p}_j = \begin{cases} \lambda_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (112)$$

と書ける。また、基底 $\{\mathbf{p}_i\}$ は正規直交基底なので

$$\vec{p}_i^T \vec{p}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (113)$$

である。ここで、 $F\vec{p}_j$ を $\vec{p}_i$ の線形結合で

$$F\vec{p}_j = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + \cdots + c_n\vec{p}_n \quad (114)$$

と表し、この式の両辺に $\vec{p}_i^T$ を左からかけると

$$\begin{aligned} \vec{p}_i^T F \vec{p}_j &= c_i \\ c_i &= \begin{cases} \lambda_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (115)$$

となる。したがって、二次形式 f を対角化する基底 $\{\mathbf{p}_i\}$ の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する成分列ベクトルは

$$F\vec{p}_i = \lambda_i\vec{p}_i \quad (116)$$

を満たす。 λ_i を行列 F の**固有値** (eigenvalue)、列ベクトル $\vec{p}_i$ を固有値 λ_i に対応する行列 F の**固有列ベクトル**、 $\vec{p}_i$ の方向を行列 F の**固有方向** (eigendirection) という。そして、ベクトル $\mathbf{p}_i$ を二次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ の**固有ベクトル** (eigenvector) という。固有ベクトルの方向を**主軸方向**といい、主軸方向を新しい座標軸にとる座標の変換を**主軸変換** (principal axis transformation) という。

行列 F の固有値と固有列ベクトルを求めるためには

$$F\vec{p} = \lambda\vec{p} \quad (117)$$

すなわち

$$(\lambda I - F)\vec{p} = \vec{0} \quad (118)$$

という方程式を解けばよい。この方程式を満たす $\vec{p}$ (ただし $\vec{p} \neq \vec{0}$) が固有列ベクトルである。 $\phi(\lambda) = |\lambda I - F|$ とすると、 $\vec{p}$ が $\vec{0}$ でない解をもつ条件は

$$\phi(\lambda) = 0 \quad (119)$$

である。 $\phi(\lambda)$ を行列 F の**固有多項式**あるいは**特性多項式** (characteristic polynomial) といい、上の方程式を**固有方程式**あるいは**特性方程式** (characteristic equation) という。固有方程式の根が F の固有値である。

固有値に対応した固有ベクトル $\mathbf{p}_i$ は、正規直交系

$$(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \delta_{ij} \quad (120)$$

になるように決めることができる。このような $\{\mathbf{p}_i\}$ を基底に選べば、二次形式 f の成分行列は、対応する固有値を対角要素とする対角行列

$$F' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (121)$$

となる。

4.7.2 例：二次曲線の主軸変換

x - y 平面上で、次の方程式

$$x^2 - xy + y^2 = a^2 \quad (122)$$

を満たす点 (x, y) の軌跡を描くことを考える。この方程式は

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = a^2 \quad (123)$$

と書けるので

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (124)$$

とすると

$$\vec{x}^T F \vec{x} = a^2 \quad (125)$$

と表される。つまり、二次形式である。

行列 F が対角行列になるように、変換行列 P により座標変換する。固有方程式

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - F| = 0 \quad (126)$$

より

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \quad (127)$$

2 次方程式の解の公式より

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} \quad (128)$$

したがって、行列 F の固有値は

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad (129)$$

$\lambda_1 = 3/2$ に対する固有列ベクトルは, $\vec{p} = \{X, Y\}^T$ とすると

$$(\lambda_1 I - F)\vec{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (130)$$

を解けば得られる. この方程式は

$$X + Y = 0 \quad (131)$$

である. 固有列ベクトルの大きさが 1 になるように $X^2 + Y^2 = 1$ を満たす解をとれば, $X = -Y = 1/\sqrt{2}$ となり

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (132)$$

が得られる. 同様に, $\lambda_2 = 1/2$ に対する固有ベクトルについては

$$(\lambda_2 I - F)\vec{p} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (133)$$

より

$$X - Y = 0 \quad (134)$$

である. $X^2 + Y^2 = 1$ を満たすように解をとれば, $X = Y = 1/\sqrt{2}$ となり

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (135)$$

が得られる. これらより, 行列 F を対角化する変換行列 P は

$$P = [\vec{p}_1, \vec{p}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (136)$$

となる. 行列 P により行列 F を合同変換すると

$$F' = P^T F P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (137)$$

となり, 行列 F が行列 P により対角化されていることが確認できる.

変数 x, y の新基底における変数をそれぞれ x', y' とすると, 変数変換 P により

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{Bmatrix} \quad (138)$$

と書ける. これを方程式 (122) に代入すると

$$\begin{aligned} (x' + y')^2 - (x' + y')(-x' + y') + (-x' + y')^2 &= 2a^2 \\ x'^2 + 2x'y' + y'^2 + x'^2 - y'^2 + x'^2 - 2x'y' + y'^2 &= 2a^2 \end{aligned} \quad (139)$$

よって

$$\frac{3}{2a^2}x'^2 + \frac{1}{2a^2}y'^2 = 1 \quad (140)$$

これは楕円の方程式である．楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (141)$$

は媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (142)$$

と表せる．したがって，式 (140) は t を用いて

$$\begin{cases} x' = a\sqrt{\frac{2}{3}} \sin t \\ y' = a\sqrt{2} \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (143)$$

と書ける．これを式 (138) に代入すると

$$\begin{cases} x = a \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t + \cos t \right) \\ y = a \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t + \cos t \right) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (144)$$

となる．この式の t を動かすことで，式 (122) を満たす点 (x, y) の軌跡が得られる．

4.7.3 不変量

n 次正方行列 F が与えられたとき， F の対角要素の和を**トレース** (trace) といい， $\text{Tr}F$ で表す．すなわち

$$\text{Tr}F = \sum_{i=1}^n F_{ii} \quad (145)$$

である． P を直交行列として， P による F の合同変換を

$$F^T = P^T F P \quad (146)$$

とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr} F' &= \sum_{i=1}^n F'_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (P_{ji} F_{jk} P_{ki}) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n P_{ki} P_{ji} \right) F_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{kj} F_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^n F_{kk} \\
&= \mathrm{Tr} F
\end{aligned} \tag{147}$$

となる．したがって，行列 F のトレースは直交行列による合同変換によって変化しない．このことを，トレースは直交行列による合同変換に関して**不変量** (invariant) であるという．とくに，行列 F の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると， F のトレースは

$$\mathrm{Tr} F = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tag{148}$$

である．

また，行列 F' の行列式は

$$|F'| = |P^T F P| = |P^T| |F| |P| = |P|^2 |F| = |F| \tag{149}$$

であり，行列 F の行列式も直交行列による合同変換に関して不変量である．行列 F の行列式を固有値で表すと

$$|F| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \tag{150}$$

である．

固有多項式の値も直交行列による合同変換に関して不変である．たとえば，行列 F' の固有多項式は

$$\begin{aligned}
|\lambda I - F'| &= |\lambda P^T I P - P^T F P| = |P^T (\lambda I - F) P| \\
&= |P^T| |\lambda I - F| |P| = |P|^2 |\lambda I - F| \\
&= |\lambda I - F|
\end{aligned} \tag{151}$$

となる．

たとえば， 3×3 行列 A の固有多項式は

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda) &= |\lambda I - A| = \lambda^3 - \mathrm{Tr} A \lambda^2 + \psi(A) \lambda - \det A \\
\psi(A) &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{152}$$

と書ける． $\phi(\lambda)$, $\text{Tr} A$, $\det A$ は不変量であるので， $\psi(A)$ も不変量である．行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると

$$\begin{aligned}\text{Tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \psi(A) &= \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \\ \det A &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\end{aligned}\tag{153}$$

である．

4.7.4 一般の基底変換に対する対角化

正規直交基底とはかぎらないある基底 $\{e_i\}$ に関する二次形式 $f(x, x)$ の成分行列を F とし，この基底に関する計量行列を G とする．このとき，二次形式 f の成分行列を対角行列にするような正規直交基底 $\{p_i\}$ を求めることを考える．

まず基底 $\{e_i\}$ を正規直交基底 $\{e'_i\}$ に変換する変換行列を Q とする．基底を $\{e'_i\}$ とする二次形式 f の成分行列を F' とすると，合同変換により

$$F' = Q^T F Q, \quad I = Q^T G Q\tag{154}$$

と表される．基底 $\{e_i\}$ に関する固有値問題を考えると

$$(\lambda I - F') \vec{p}' = 0\tag{155}$$

である． $\vec{p}'$ は固有ベクトル p の基底 $\{e'_i\}$ に関する成分列ベクトルである．これを式 (154) を用いて書き換えると

$$(\lambda Q^T G Q - Q^T F Q) \vec{p}' = 0\tag{156}$$

すなわち

$$Q^T (\lambda G - F) Q \vec{p}' = 0\tag{157}$$

となる．ここで， $\vec{p} = Q \vec{p}'$ とし，上式の両辺に左から $(Q^T)^{-1}$ を掛けると

$$(\lambda G - F) \vec{p} = 0\tag{158}$$

が得られる． $\vec{p}$ は固有ベクトル p の基底 $\{e_i\}$ に関する成分列ベクトルである． $\vec{p}$ が $\vec{0}$ でない解を持つ条件は

$$\phi(\lambda) = |\lambda G - F| = 0\tag{159}$$

である．この固有方程式の根が，計量行列 G に関する行列 F の固有値である．

固有値に対応した固有ベクトル p_i は正規直交系

$$(p_i, p_j) = \vec{p}_i^T G \vec{p}_j = \delta_{ij}\tag{160}$$

となるように決めることができる．この固有ベクトルの成分列ベクトルを並べてできる変換行列 $P = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n]$ により

$$P^T F P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$P^T G P = I \quad (162)$$

となる．

5 線形写像の対角化

5.1 相似変換

基底 $\{e_i\}$ から新しい基底 $\{e'_i\}$ に変換する変換行列を P とする．ベクトル x, y の基底 $\{e_i\}, \{e'_i\}$ に関する成分列ベクトルをそれぞれ $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}'$ とすると

$$\vec{x} = P \vec{x}', \quad \vec{y} = P \vec{y}' \quad (163)$$

と表される．ベクトル x から y に写す線形写像を A とすると

$$y = Ax \quad (164)$$

である．線形写像 A の基底 $\{e_i\}$ に関する成分行列を A とすると

$$\vec{y} = A \vec{x} \quad (165)$$

と書ける．これらの関係より $\vec{y}'$ は

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= P^{-1} \vec{y} \\ &= P^{-1} A \vec{x} \\ &= P^{-1} A P \vec{x}' \end{aligned} \quad (166)$$

となる．これにより A に関する成分行列 A' は

$$A' = P^{-1} A P \quad (167)$$

と表される．これを変換行列 P に関する成分行列 A の**相似変換** (similarity transformation) という．

5.2 線形写像の対角化

5.2.1 線形写像の対角化

線形写像 A の成分行列を、基底をうまく選んで対角行列にする問題を考える。線形写像 A で写像しても方向が変わらないような $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}$ があったとすると

$$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \quad (168)$$

または

$$(\lambda I - A)\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (169)$$

が満たされる。このとき、 λ を A の**固有値**、 $\mathbf{p}$ を固有値 λ に対する A の**固有ベクトル**という。ある基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する線形写像 A の成分行列を A 、固有ベクトル $\mathbf{p}$ の成分列ベクトルを $\vec{p}$ とすると

$$(\lambda I - A)\vec{p} = \vec{0} \quad (170)$$

と書ける。 $\vec{p}$ を**固有列ベクトル**という。ここで

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| \quad (171)$$

とおく。これを線形写像 A の**固有多項式**あるいは**特性多項式**という。 $\vec{p}$ が $\vec{0}$ でない解を持つ条件は

$$\phi(\lambda) = 0 \quad (172)$$

である。この式を線形写像 A の**固有方程式**あるいは**特性方程式**という。固有方程式の根が A の固有値である。

線形写像 A に対して、 n 個の固有ベクトル $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ を基底に選べば、 A の成分行列は対角行列

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (173)$$

になる。

A の固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する成分列ベクトルが

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \vec{p}_n = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix} \quad (174)$$

であったとする。これを用いると、各固有ベクトルは

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{e}_i \quad (175)$$

と書ける。

5.2.2 不変量

線形写像 A の固有多項式

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (176)$$

は相似変換に関して不変である。変換行列を P として、相似変換を

$$A' = P^{-1}AP \quad (177)$$

とすると、 A' に関する固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda I - A'| &= |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I - A||P| = |P|^{-1}|\lambda I - A||P| \\ &= |\lambda I - A| \end{aligned} \quad (178)$$

となる。行列 A に関する $\phi(\lambda)$ が

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (179)$$

となったとき、 $\phi(\lambda)$ の不変性により係数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は相似変換により変化しない。これを、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は相似変換に関する行列 A の**不変量**であるという。ここで、 a_1 について計算すると

$$a_1 = -a_{11} - a_{22} \cdots - a_{nn} = -\text{Tr}A \quad (180)$$

である。これにより、行列 A のトレース $\text{Tr}A$ は相似変換に関して不変量である。また、 $\phi(\lambda)$ を書き換えて

$$\phi(\lambda) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n c_n \quad (181)$$

とおけば、 $c_1 = \text{Tr}A$, $c_n = |A|$ であり、 $c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ は行列 A の要素の複雑な式である。重複を許した n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (182)$$

であるから、不変量 $c_1, c_2, \dots, c_n$ は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ で表される。とくに

$$c_1 = \text{Tr}A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad c_n = |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (183)$$

である。

参考文献

- [1] 甘利俊一・金谷健一：理工学者が書いた数学の本 1 線形代数，講談社 (1987).
- [2] 石原繁：テンソル -科学技術のために-，裳華房 (1991).
- [3] 戸川隼人・松坂秀子 監修，佐藤次男・中村理一郎 著：よくわかる数値計算 アルゴリズムと誤差解析の実際，日刊工業新聞社 (2001).