コゼニー-カルマンの式

春日 悠

2021 年 8 月 1 日

目 次

1 ニュートンの粘性法則 **1**

2 管内の流れ **2**

2.1 円管内の流れ 2

2.2 円管の摩擦による圧力損失 3

2.3 非円形の管の摩擦による圧力損失 3

3 コゼニー-カルマンの式 **4**

3.1 ダルシーの法則 4

3.2 コゼニー-カルマンの式 4

1 ニュートンの粘性法則

液体を板 2 枚平行に上下で挟み込み，下の板は固定して上の板を一方向に一定の速度 U で動かした時，液体の速度の分布は厚み方向に 0 から U まで線形に変化する．この時の流れをクエット (Couette) 流れという．液体の厚みを h とすると，上の板にかかる力 (せん断応力)τ は，次のように表される．

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \tag{1}$$

ここで，μ は液体の粘性係数である．一般的な流れでは，静止した壁からの距離に対する流速の変化は線形ではないので，流れの流速を u，壁からの距離を y とすると，せん断応力は次式で表される．

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{2}$$

これをニュートンの粘性法則という．

2　管内の流れ

2.1　円管内の流れ

円管内の流れは，内壁面で速度が 0 で，内壁面上に境界層という速度の遅い領域ができる．境界層は下流に行くにしたがって厚みを増し，そのうち中央で合流する．この状態を「十分に発達した流れ」とよぶ．ここでは，円管内の十分に発達した流れを考え，比較的低速で落ち着いた流れである層流の状態を仮定する．

円管の中心に半径 r，長さ Δx の微小円筒を想定する．円管内の流速を u とすると，せん断応力は次式で表される．

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \tag{3}$$

マイナスが付いているのは，r の場合，壁面に近づく方向が正になるためである．流れは定常的であるとして，微小円筒にかかる力の釣り合いを考えると，次のようになる．

$$p\pi r^2 - \left(p + \frac{dp}{dx}\Delta x \right) \pi r^2 - 2\pi r \Delta x \tau = 0 \tag{4}$$

ここで，p は円管内の圧力である．これを整理すると，次式になる．

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{5}$$

上の式を r について積分すると

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} + C \tag{6}$$

C は積分定数である．円管の半径を R とすると，$r = R$ で $u = 0$ なので，次式が得られる．

$$u = -\frac{R^2 - r^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} \tag{7}$$

ここで，dp/dx は圧力勾配とよばれる．円管内の流速は，圧力勾配に比例し，粘性係数に反比例する．

流速を面積積分すると，流量 Q の式が得られる．

$$Q = \int_0^R 2\pi r dr u = -\frac{\pi R^4}{4\mu}\frac{dp}{dx} \tag{8}$$

平均流速 u_m は，流量を円管の断面積で割ると得られる．

$$u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dx} = -\frac{D^2}{32\mu}\frac{dp}{dx} \tag{9}$$

ここで，$D = 2r$ は円管の直径である．流速の極値は $r = 0$ のときなので，最大速度 $u_{\max}$ は

$$u_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} \tag{10}$$

である．つまり

$$u_m = \frac{1}{2}u_{\max} \tag{11}$$

である．

2.2 円管の摩擦による圧力損失

円管の長さを L，そのときの圧力の変化を Δp とすると

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} \tag{12}$$

と表される (文献によっては左辺にマイナスをつけることがあるので注意)．Δp を摩擦による圧力損失という．圧力損失 Δp は次式のように表される．

$$\Delta p = -\frac{8\mu L}{R^2} u_m = -\frac{32\mu L}{D^2} u_m \tag{13}$$

これをハーゲン-ポアズイユ (Hagen-Poiseuille) の法則といい，これが成り立つ流れをハーゲン-ポアズイユ流れという．

円管の内壁面にかかるせん断応力 τ_w は

$$\tau_w = -\mu \frac{du}{dr} = -\frac{R}{2} \frac{\Delta p}{L} \tag{14}$$

である．ここで，せん断応力 τ_w と流れの運動エネルギー $\rho u_m^2/2$ (ただし ρ は流体の密度) の比を f と表すと

$$f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2/2} = -\frac{R/2}{\rho u_m^2/2} \frac{\Delta p}{L} \tag{15}$$

これより，次式が得られる．

$$\Delta p = -4f \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} \tag{16}$$

これをファニング (Fanning) の式といい，f は摩擦係数とよばれる．または，$\lambda = 4f$ として

$$\Delta p = -\lambda \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} \tag{17}$$

これをダルシー-ワイスバッハ (Darcy-Weisbach) の式といい，λ はやはり摩擦係数とよばれる．両者は同じもので，分野によって呼び名が異なるだけのようである．

円管内の流れが層流の場合は

$$\Delta p = -\frac{32\mu L}{D^2} u_m = -\frac{64\mu}{\rho u_m D} \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} \tag{18}$$

である．ここで，レイノルズ数を $Re = \rho u_m D/\mu$ と表すと，$\lambda = 64/Re$ である．

2.3 非円形の管の摩擦による圧力損失

管の断面の形が円でない場合を考える．管の断面積を A，管の断面の周長を Γ とすると，力のつりあいは

$$\Delta p A + \tau_w \Gamma L = 0 \tag{19}$$

である．f の定義から $\tau_w = f\rho u_m^2/2$ なので，圧力損失は

$$\Delta p = -\tau_w \frac{\Gamma L}{A} = -4f \frac{\Gamma L}{4A} \frac{\rho u_m^2}{2} = -\lambda \frac{L}{D_e} \frac{\rho u_m^2}{2} \tag{20}$$

ここで，$De = 4A/\Gamma$ を水力直径 (hydraulic diameter) とか，等価直径 (equivalent diameter) などとよぶ．

非円形の管の摩擦による圧力損失を考える場合は，水力直径を考えて，円管と同様に扱えばよい．

3 コゼニー-カルマンの式

3.1 ダルシーの法則

砂などの粒子の集まりのような，狭い隙間を流体が通るような媒体を，多孔質媒体 (porous media) という．多孔質媒体を通る流体の流速と圧力損失には，以下の関係がある．

$$\bar{u} = -\frac{K}{\mu}\frac{\Delta p}{L} \tag{21}$$

ここで，$\bar{u}$ は多孔質体を通る流体の平均流速，K は浸透率とよばれる．これをダルシー (Darcy) の法則という．

3.2 コゼニー-カルマンの式

多孔質媒体の浸透率を推定することを考える．粒子が作る流路のネットワークをそのまま考えるのは大変なので，分岐のないひとつながりのうねうねした流路がいっぱいあるものと考えよう．そして，それらをさらに直管の集合としてモデル化する．もとはうねうねしているので，直管の長さは媒体の長さと一致するとは限らない．その長さを L_e としよう．また，流路の断面は円形とは限らないし，そもそも 1 本でもないので，管の水力直径 D_e を考える．

多孔質媒体の隙間は一般的にはかなり狭いはずなので，隙間の流れは層流とする．この場合，モデル化された直管内部の流れの平均流速 u_e は，次式で表される．

$$u_e = -\frac{D_e^2}{32\mu}\frac{\Delta p}{L_e} \tag{22}$$

直管群の断面積を A_e，多孔質媒体の断面積を A とすると，直管群を通る流量 Q_e と多孔質媒体を通る流量 Q は同じはずなので，以下のようになる．

$$\frac{Q_e}{Q} = \frac{u_e A_e}{\bar{u}A} = \frac{u_e A_e L_e L}{\bar{u}AL L_e} = \frac{u_e V_e L}{\bar{u}V L_e} = 1 \tag{23}$$

ここで，$V_e = A_e L_e$ は空孔の体積，$V = AL$ は多孔質媒体の体積である．多孔質媒体の空隙率を $\varepsilon = V_e/V$ とすると，次式を得る．

$$u_e = \frac{1}{\varepsilon}\frac{L_e}{L}\bar{u} \tag{24}$$

これより

$$\bar{u} = -\frac{D_e^2 \varepsilon}{32\mu} \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 \frac{\Delta p}{L} \tag{25}$$

水力直径は，円管群の周長を Γ_e とすると

$$D_e = \frac{4A_e}{\Gamma_e} = \frac{4A_e L_e / AL}{\Gamma_e L_e / AL} = \frac{4V_e/V}{\Gamma_e L_e / V} = \frac{4\varepsilon}{S_b} \tag{26}$$

ここで，$S_b = \Gamma_e L_e / V$ は媒体体積あたりの空孔の表面積である．一方，固体体積 $V_s = V - V_e$ あたりの空孔の表面積を $S_v = \Gamma_e L_e / V_s$ とすると

$$S_b = \frac{\Gamma_e L_e}{V} = \frac{\Gamma_e L_e}{V_s} \frac{V_s}{V} = S_v(1-\varepsilon) \tag{27}$$

これより

$$\bar{u} = -\frac{\varepsilon^3}{2S_b^2 \mu} \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 \frac{\Delta p}{L} = -\frac{\varepsilon^3}{2S_v^2 (1-\varepsilon)^2 \mu} \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 \frac{\Delta p}{L} \tag{28}$$

$k = 2(L_e/L)^2$ と置くと

$$\bar{u} = -\frac{\varepsilon^3}{kS_b^2 \mu} \frac{\Delta p}{L} = -\frac{\varepsilon^3}{kS_v^2 (1-\varepsilon)^2 \mu} \frac{\Delta p}{L} \tag{29}$$

この式をコゼニー-カルマン (Kozeny-Carman) の式という．k はコゼニー定数と呼ばれ，一般化して次式で表される．

$$k = k_0 \left(\frac{L_e}{L} \right)^2 \tag{30}$$

k_0 はふつう 2 とされる．$(L_e/L)^2$ はねじれ率などとよばれ，流路のうねうね具合を表す．実験から，k の値は 4 から 5.5 あたりとされる．

浸透率 K は次式となる．

$$K = \frac{\varepsilon^3}{kS_b^2} = \frac{\varepsilon^3}{kS_v^2 (1-\varepsilon)^2} \tag{31}$$

流路の表面積は，直径 D_p の球を考えると

$$S_v = \frac{\pi D_p^2}{\pi D_p^3 / 6} = \frac{6}{D_p} \tag{32}$$

これより

$$K = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{36k(1-\varepsilon)^2} \tag{33}$$

$k = 4$ だと

$$K = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2} \tag{34}$$

$k = 5$ だと

$$K = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} \tag{35}$$

となる．

参考文献

[1] 山田英巳，濱川洋充，田坂裕司：流れ学，森北出版 (2016).

[2] 化学工学会編：基礎化学工学，培風館 (1999).

[3] 日高重助，神谷秀博 編著：基礎粉体工学，日刊工業新聞社 (2014).