

補間

春日 悠

2021 年 9 月 6 日

目次

1 線形補間	1
2 2 次多項式補間	2
3 3 次多項式補間	3

1 線形補間

複数の位置 x_i の値 q_i がわかっているとき、その間の任意の位置 x の値 q を推定したい。簡単に行うには線形補間を用いる。 x が x_i と x_{i+1} の間にあるとすると、 q は次式で推定できる。

$$q = \frac{q_{i+1} - q_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + q_i \quad (1)$$

比率

$$s = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2)$$

を定義すると

$$q = (1 - s)q_i + sq_{i+1} \quad (3)$$

と書ける。ただし、 $0 \leq s < 1$ である。

もし x が x_i と x_{i+1} の中点 $x_{i+1/2}$ にあるなら

$$q_{i+1/2} = \frac{q_i + q_{i+1}}{2} \quad (4)$$

つまり、平均値になる。

まず i を求める必要があるが、値の位置がバラバラであれば、検索をするしかないが、もし間隔が一定の Δx であるなら、 i は次式で求められる。

$$i = \lfloor (x - x_0) / \Delta x \rfloor \quad (5)$$

ここで $\lfloor X \rfloor$ は床 (floor) 関数で、 X 以下の最大の整数を返す。

2 2次多項式補間

2次多項式を使って値を補間することを考える。

$$q = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 \quad (6)$$

係数 a_k を求める必要がある。係数が3つあるので、 x_{i-1} 、 x_i 、 x_{i+1} の3つの値を使って求められる。

$$\begin{bmatrix} q_{i-1} \\ q_i \\ q_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i-1} - x_i & (x_{i-1} - x_i)^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_{i+1} - x_i & (x_{i+1} - x_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

最終的には q_i の式に整理したい。上式を $q = Ba$ とすると $a = B^{-1}q$ である。 $q = a^T x$ なので、 q と q の関係は次式のようになる。

$$\begin{aligned} q &= c^T q \\ c &= (B^{-1})^T x \end{aligned} \quad (8)$$

この c を求めればよい。数式処理ソフトの Maxima を使えば簡単に求まる。

```
B:matrix(
  [1, x0 - x1, (x0 - x1)^2],
  [1, 0, 0],
  [1, x2 - x1, (x2 - x1)^2]
);
sv:matrix([1, x - x1, (x - x1)^2]);
factor(transpose(invert(B)).sv);
```

最終的に

$$\begin{aligned} q &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i-1})} q_{i-1} \\ &+ \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} q_i \\ &+ \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} q_{i+1} \end{aligned} \quad (9)$$

値の間隔を一定とし、比率 s の式として考える。

$$q = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 \quad (10)$$

係数を求めるには、以下の式を解けばよい。

$$\begin{bmatrix} q_{i-1} \\ q_i \\ q_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

上と同様にして

$$q = -\frac{1}{2}s(1-s)q_{i-1} + (1-s)(1+s)q_i + \frac{1}{2}s(1+s)q_{i+1} \quad (12)$$

この場合、 x_i と x_{i+1} の間の補間で考えると対称でないので (x_i 、 x_{i+1} 、 x_{i+2} を使う補間も考えられるので)、 $-0.5 \leq s < 0.5$ とする。

中点の値 $q_{i+1/2}$ は

$$q_{i+1/2} = \frac{1}{8}(q_{i-1} + 6q_i + 3q_{i+1}) \quad (13)$$

3 3次多項式補間

3次多項式

$$q = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \quad (14)$$

を考えると、 x_{i-1} 、 x_i 、 x_{i+1} 、 x_{i+2} の値を用いて

$$\begin{bmatrix} q_{i-1} \\ q_i \\ q_{i+1} \\ q_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

これを解いて

$$\begin{aligned} q = & -\frac{1}{6}s(1-s)(2-s)q_{i-1} \\ & + \frac{1}{2}(1-s)(1+s)(2-s)q_i \\ & + \frac{1}{2}s(1+s)(2-s)q_{i+1} \\ & - \frac{1}{6}s(1-s)(1+s)q_{i+2} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $0 \leq s < 1$ である。