

大気境界層

春日 悠

2021 年 4 月 17 日

目 次

1 大気境界層の速度分布	1
2 乱流エネルギーとエネルギー散逸率	3

1 大気境界層の速度分布

我々が普段暮らしている 1 km 以下の高度の大気は，地球規模で見ると境界層になっている．これを大気境界層 (Atmospheric Boundary Layer, ABL) という．地表面の粗さが一様で，平坦地形，大気安定度が中立のとき，大気の速度分布は対数則で表されると考えられている．

境界層の理論から，大気境界層の速度分布を求めてみる．大気の平均速度を $\bar{u}$ とし，高度を z で表す．地表のせん断応力 τ_w をレイノルズ応力で表すとして，プラントルの混合長の仮説を用いると

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \ell_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \quad (1)$$

ここで ℓ_m は混合長 (mixing length) である．摩擦速度 (friction velocity) を $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ で定義すると

$$u^* = \ell_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2)$$

渦粒子は，壁近傍では壁による制約を受け，壁から離れるにつれ自由になると考えられる．したがって，混合長は壁からの距離 z に比例すると仮定できる．

$$\ell_m = \kappa z \quad (3)$$

ここで κ はカルマン定数と呼ばれ，0.41 程度の値とされる．

これを用いて，摩擦速度は

$$\frac{u^*}{z} = \kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (4)$$

$z = z_0$ で $u = 0$ として、両辺を z で z_0 から z まで積分すると

$$u^* \ln \frac{z}{z_0} = \kappa \bar{u} \quad (5)$$

したがって

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (6)$$

z_0 は (空気力学的) 粗度と呼ばれる地表面の粗さ (roughness) を表す高さであり、値は障害物の平均高さの $1/50 \sim 1/5$ 程度とされる。

$z = 0$ で $\bar{u} = 0$ としたい場合は、次式のようにする。

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z + z_0}{z_0} \quad (7)$$

$\bar{u} = 0$ となる高さ z_g を指定したい場合は、次のように表現できる。

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z - z_g + z_0}{z_0} \quad (8)$$

上式を摩擦速度について解くと

$$u^* = \frac{\kappa \bar{u}}{\ln \frac{z - z_g + z_0}{z_0}} \quad (9)$$

高さ z_{ref} (z_g からの相対高さ) における速度 u_{ref} を用いて、摩擦速度は次のように表すことができる。

$$u^* = \frac{\kappa u_{ref}}{\ln \frac{z_{ref} + z_0}{z_0}} \quad (10)$$

大気の流れの速度分布の表現には、べき乗則 (power law) というものもある [3]。

$$\bar{u} = u_{ref} \left(\frac{z - z_g}{z_{ref} - z_g} \right)^\alpha \quad (11)$$

ここで α はパラメタで、障害物の高さなど (地表面粗度区分) によって変わる (市街地では $\alpha = 0.27$)。

α と z_0 の関係を求めてみよう。対数則とべき乗則の速度をそれぞれ z で微分して等式とすると

$$\frac{u^*}{\kappa z} = \alpha \frac{u_{ref}}{z_{ref}} \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^{\alpha-1} \quad (12)$$

簡単のため、 $z_g = 0$ とし、対数則は分子に z_0 が無い形とした。 $z = z_{ref}$ とすると

$$\alpha = \frac{1}{\ln(z_{ref}/z_0)} \quad (13)$$

また

$$z_0 = z_{ref} \exp(-1/\alpha) \quad (14)$$

ただし、これらからは z_{ref} おいて速度が一致するパラメタが求まるだけであって、速度分布全体は合わない。速度分布全体を合わせるには、パラメタフィッティングを行う必要がある。

たとえば、gnuplot の fit を使う場合、まずフィッティング対象のデータを Python などで作る。

```
from math import log
f = open("data.txt", "w")
x = 1
for i in range(1, 1000):
    f.write("%f %f\n" % (x,
        5.*log((x + 1.)/1.)/log((30. + 1.)/1.)))
    x += 1.
f.close()
```

ここでは $z_{ref} = 30$, $u_{ref} = 5$, $z_0 = 1$ として対数則分布のデータを作っている。これを用いて、gnuplot で次のようにする。

```
$ gnuplot
...
gnuplot> f(x) = 5.*(x/30.)**a
gnuplot> a = 1
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> a = 0.1
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> a = 0.2
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> fit f(x) 'data.txt' via a
...
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> print a
0.207247457905221
gnuplot> quit
```

途中で何度か a の値を変えて表示しなおしているところがあるが、これは適切な初期値を設定するためである。最終的に図 1 のようなグラフが得られる。

2 乱流エネルギーとエネルギー散逸率

大気境界層の速度分布に対応する乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を求めよう。

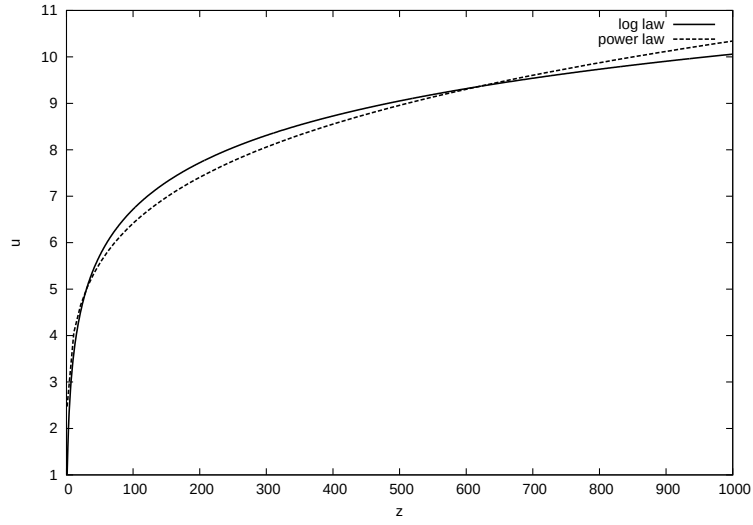


図 1: 速度分布

境界層内の流れが，流れ方向に特性が変わらない十分に発達した乱流である場合，対数則層において乱流エネルギーの生成とエネルギー散逸率との平衡性を仮定できる．

$$\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = \varepsilon \quad (15)$$

ここで， ν_t は乱流粘性係数 μ_t を密度 ρ で割った乱流動粘性係数であり，次式で表される．

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (16)$$

C_μ は定数で $C_\mu = 0.09$ である．壁面せん断応力 τ_w を次式で表す．

$$\tau_w = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (17)$$

これより

$$u^{*2} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (18)$$

上式および式 (16) から，式 (15) の左辺は

$$\begin{aligned} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 &= \nu_t \left(\frac{u^{*2}}{\nu_t} \right)^2 \\ &= \frac{u^{*4}}{\nu_t} \\ &= \frac{u^{*4}}{C_\mu} \frac{\varepsilon}{k^2} \end{aligned} \quad (19)$$

これより式 (15) は

$$\frac{u^{*4}}{C_\mu} \frac{\varepsilon}{k^2} = \varepsilon \quad (20)$$

であるので

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{C_\mu}} \quad (21)$$

これは定数である.

速度の対数則分布から

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z - z_g + z_0}{z_0} \right) = \frac{u^*}{\kappa(z - z_g + z_0)} \quad (22)$$

これより ε は

$$\varepsilon = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = \frac{u^{*3}}{\kappa(z - z_g + z_0)} \quad (23)$$

速度同様, k , ε の分布をべき乗で表す方法もある [3].

$$\begin{aligned} k &= (I\bar{u})^2 \\ I &= I_G \left(\frac{z - z_g}{z_G} \right)^{-\alpha-0.05} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \\ &= u^{*2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= \sqrt{C_\mu} k \alpha \frac{u_{ref}}{z_{ref}} \left(\frac{z - z_g}{z_{ref}} \right)^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで I は乱流強度, $I_G = 0.1$ は上空風高度 z_G の乱流強度で, z_G は粗度区分によって変わる (市街地では $z_G = 550$ [m]). この場合, k は高さ方向に分布がある.

参考文献

- [1] 白倉昌明, 大橋秀雄: 流体力学 (2), コロナ社 (1969).
- [2] 近藤純正: 地表面に近い大気の科学, 東京大学出版会 (2000).
- [3] 日本建築学会: 都市の風環境予測のための CFD ガイドブック (2020).